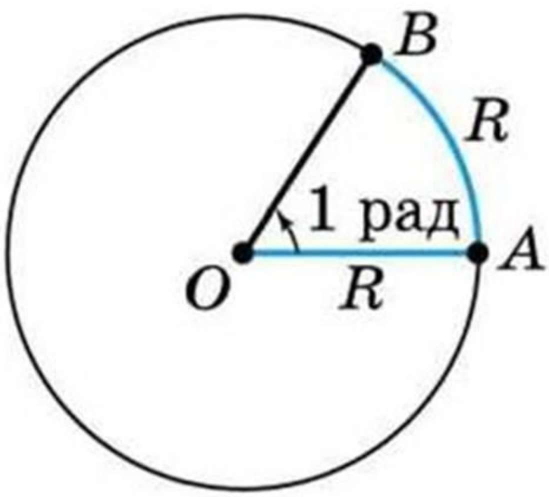
РАДІАННЕ ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ

Алгебра. 10 клас



2021-2022 НАВЧАЛЬНИЙ РІК
ТКАЧ ІРИНА ГРИГОРІВНА

Вступ.

Прослухайте повідомлення

Згадайте, які ви знаєте одиниці вимірювання кутів?

А сьогодні ви ще познайомитесь із іншою одиницею вимірювання - **РАДІАН.**

Запишіть, чому дорівнює градусна міра прямого кута?

Чому дорівнює градусна міра розгорнутого кута?

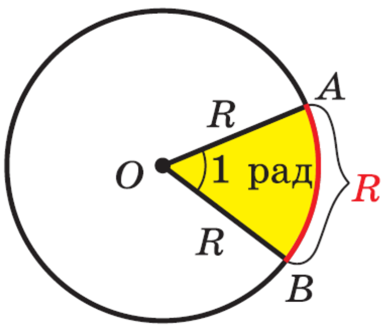
Опишіть, що таке 1° ?

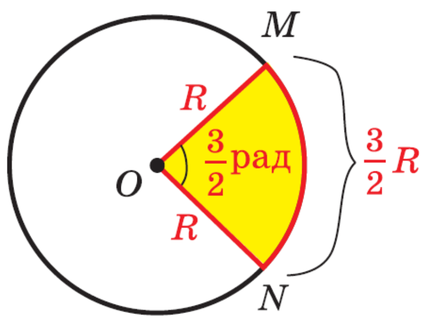
Який кут називають вписаним у коло?

Який кут називають центральним?

Означення.

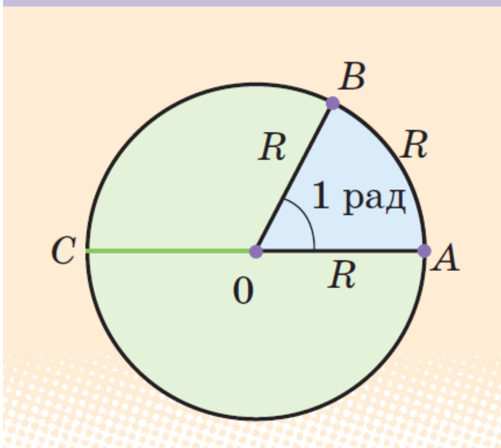
Кутом в один **радіан** називають центральний кут кола, який спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.





Градусна міра кута ($1^\circ = \frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута)

Радіанна міра кута



1 *радіан* — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

$\angle AOB = 1$ рад. Це означає, що $\cup AB = OA = R$.

$\angle AOC = 180^\circ = \pi$ (радіан).

$\angle AOC$ — розгорнутий.

1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$; $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить $180°$. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{\mathbf{1\ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна встановити: 1 рад $\approx 57°$.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180, то отримаємо:

$$\boxed{\mathbf{1° = \frac{\pi}{180}\ рад}} \qquad (2)$$

Переведіть градусну міру у радіанну і перетягніть відповідь так, щоб утворилась правильна рівность.

$135° =$ $\frac{\pi}{3}$ $30° =$ $\frac{\pi}{4}$

$90° =$ π

$\frac{3\pi}{2}$ $\frac{\pi}{6}$ $45° =$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$ $150° =$

$60° =$ $\frac{\pi}{2}$ $270° =$ $120° =$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса із центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним**.

Нехай точка P, починаючи рух від точки P_0 (1; 0), переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.4). Говоритимемо, що **точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут $120°$).

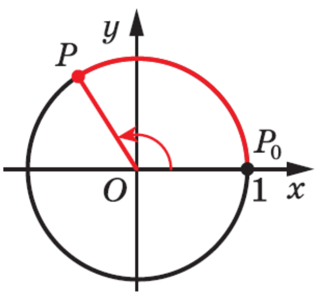


Рис. 8.4

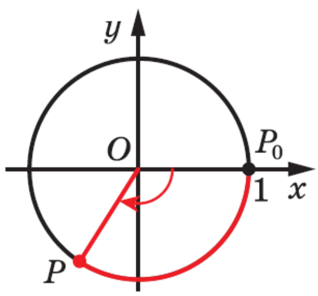


Рис. 8.5

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою та зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 8.5). Говоритимемо, що точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут $-120°$).

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки (рис. 8.4), то кут повороту вважають додатним, а коли за годинниковою стрілкою (рис. 8.5) — то від'ємним.

Найчастіше у записі радіанної міри кутів назву одиниці виміру «радіан» (або скорочено рад) не пишуть. Наприклад, замість рівності $90° = \frac{\pi}{2}$ радіан пишуть $90° = \frac{\pi}{2}$.

Виразіть у градусній мірі величини кутів:

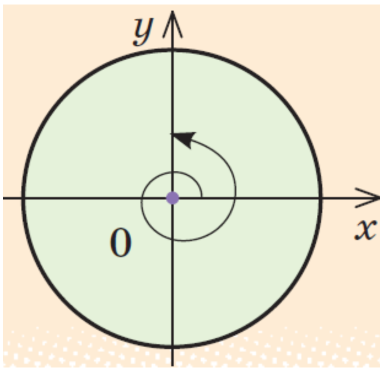
$\frac{\pi}{10}$ =

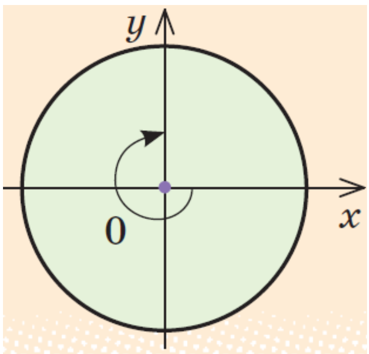
$\frac{2\pi}{3}$ =

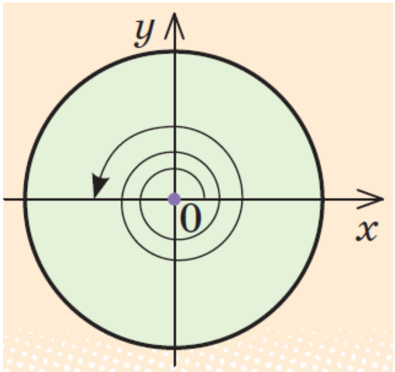
$\frac{3\pi}{4}$ =

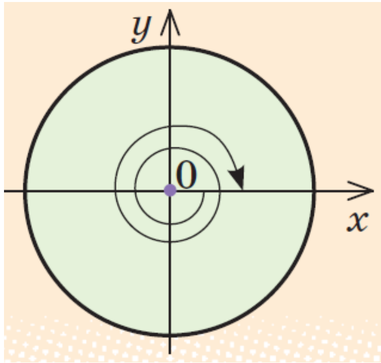
5 =

Запишіть, чому дорівнюють кути повороту, показані на рисунку.









Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунка 8.6. Можна сказати, що точку A отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут $90°$) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут $-270°$). Точку B отримано в результаті повороту точки P_0 на кут π (на кут $180°$) або на кут $-\pi$ (на кут $-180°$). Точку C отримано в результаті повороту точки P_0 на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут $270°$) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут $-90°$).

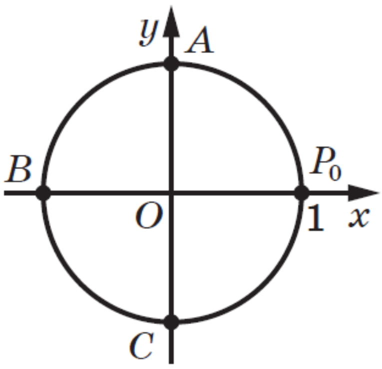


Рис. 8.6

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить один повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто $360°$) або -2π (тобто $-360°$).

Якщо точка P зробить півтора оберту проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто $540°$), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто $-540°$).

Величина кута повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Заповніть таблицю:

Градусна міра кута		$12°$	$36°$			$105°$	$225°$			$240°$
Радіанна міра кута	$\frac{\pi}{18}$			$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{3\pi}{5}$			4π	$1,8\pi$	

Відповідність між деякими радіанними мірами кутів бажано пам'ятати:

$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
ctg α	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не існує

Прослухайте повідомлення

У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:

127° →

400° →

- 470° →

89° →

600° →

$\pi/5$ →

276° →

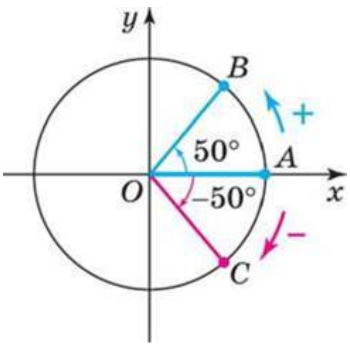
- 400° →

- $7\pi/6$ →

2,4π →

3 →

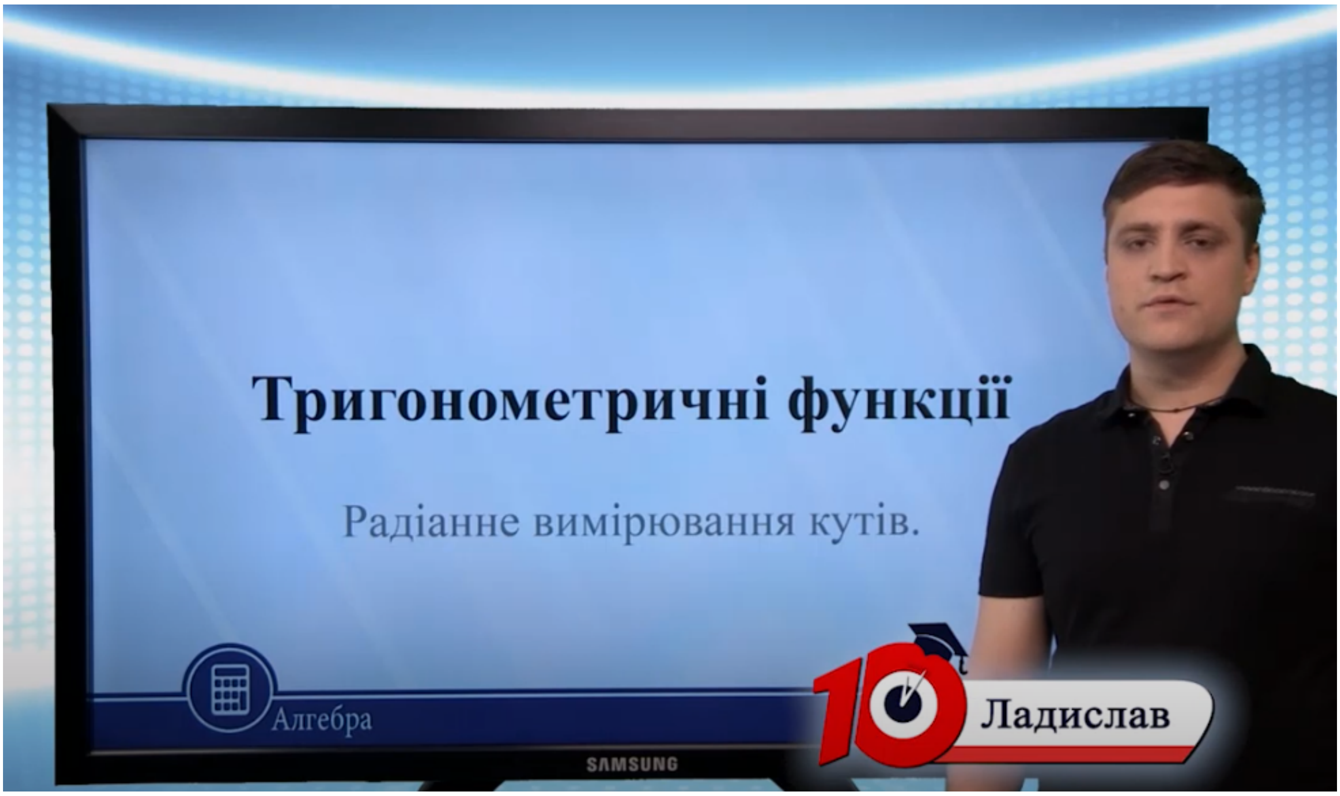
- 2 →



Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:

$\pi/2 \rightarrow P\,(0;\,1)$	$-\,90° \rightarrow$	$-\,180° \rightarrow$
$\pi \rightarrow$	$-\,3\pi/2 \rightarrow$	$-\,2\pi \rightarrow$
$3\pi \rightarrow$	$-\,\pi/2 \rightarrow$	$3\pi/2 \rightarrow$

Ви можете додатково переглянути відео із всеукраїнської школи онлайн за покликанням на картинці.



Підготуйтесь до наступного уроку.
Повторіть матеріал за 8 клас.

за 9 клас

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, точці P (рис. 8.7) відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д. Зауважимо, що всі ці кути можна отримати за допомогою формули $\alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

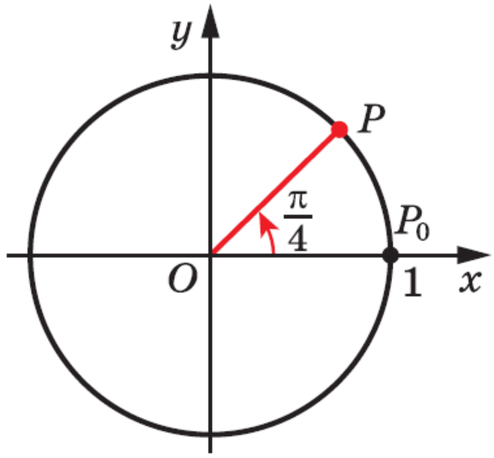


Рис. 8.7

Серед наведених кутів повороту виберіть тільки ті, при яких початковий радіус займе таке саме положення, як і при повороті на кут 70°. Перетягніть їх у хмаринку.

790° **-290°**

500°

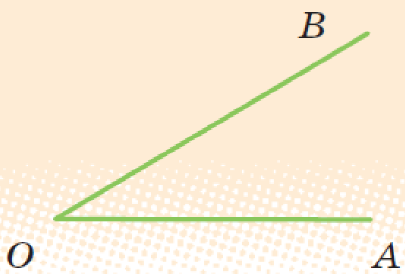
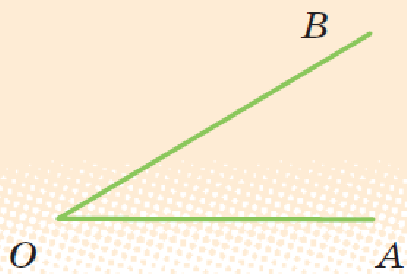
-220° **1150°**

-30° **1580°**

Пройдіть тестування

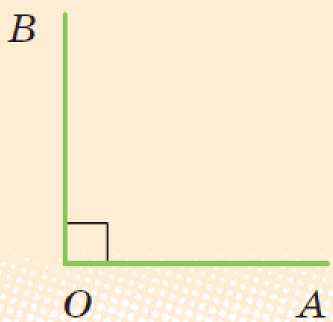
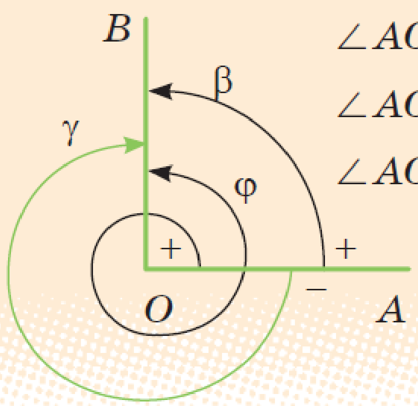
ПОВТОРЕННЯ

1. Поняття кута

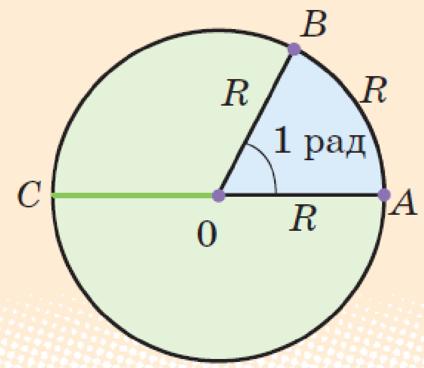
У геометрії	У тригонометрії*
Кут — геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки.	*Кут* — фігура, утворена унаслідок повороту променя на площині навколо початкової точки.
	
$\angle AOB$ утворений променями OA і OB	$\angle AOB$ утворений унаслідок повороту променя OA навколо точки O

2. Вимірювання кутів

Градусна міра кута ($1^\circ = \dfrac{1}{180}$ частина розгорнутого кута)

Кожному куту ставиться у відповідність градусна міра $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$. $\angle AOB = 90^\circ$	Кожному куту як фігурі ставиться у відповідність кут повороту, за допомогою якого утворено цей кут (проти годинникової стрілки — додатний, за годинниковою стрілкою — від'ємний). Кут повороту $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.
	 $\angle AOB = \beta = 90^\circ$ $\angle AOB = \gamma = -270^\circ$ $\angle AOB = \varphi = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$

Радіанна міра кута



1 *радіан* — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

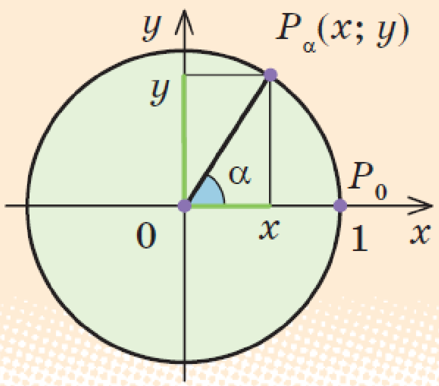
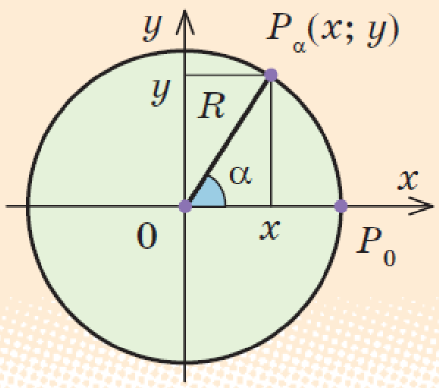
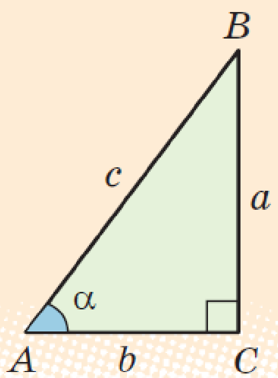
$\angle AOB = 1$ рад. Це означає, що $\cup AB = OA = R$.

$\angle AOC = 180^\circ = \pi$ (радіан).

$\angle AOC$ — розгорнутий.

1 радіан $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$; $\quad 1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ радіан

1. Означення тригонометричних функцій

через одиничне коло $(R=1)$	через довільне коло (R — радіус кола)	через прямокутний трикутник (для гострих кутів)
		
$\sin\alpha = y$ — ордината точки P_α	$\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$	$\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$
$\cos\alpha = x$ — абсциса точки P_α	$\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$	$\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$
$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a}$