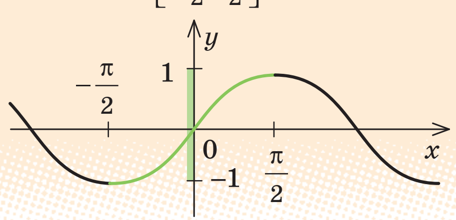
§ 12. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

До найпростіших тригонометричних рівнянь відносять рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Їх загальні розв'язки записують, використовуючи так звані обернені тригонометричні функції, для позначення яких перед відповідною функцією ставиться буквосполучення «arc» (читається «арк»).

12.1. Обернені тригонометричні функції

Для запису значень $\arcsin a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\arccos a$ (де $|a| \leqslant 1$), $\operatorname{arctg} a$ і $\operatorname{arcctg} a$ виділяють ті проміжки значень змінної, де основні функції ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$) зростають або спадають. У виділених проміжках основні функції кожне своє значення приймають тільки в одній точці, і тому для кожної з основних тригонометричних функцій існує обернена функція. Відповідні означення, приклади знаходження значень обернених тригонометричних функцій і формули для знаходження обернених тригонометричних функцій від'ємних чисел (та рисунки, які дозволяють обґрунтувати правильність відповідних формул, спираючись на симетричність відповідних точок на одиничному колі) наведені в табл. 24.

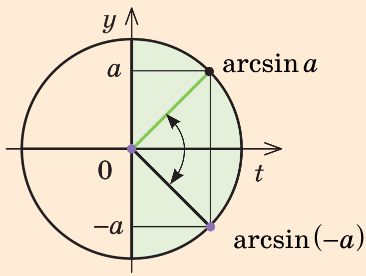
Таблиця 24

ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ	
1. Поняття $\arcsin a$ $(\lvert a \rvert \leqslant 1)$	
Графік функції $y = \sin x$	Означення $\arcsin a$
На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x$ зростає.  	$\arcsin a$ **— це таке число з проміжку** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$**, синус якого дорівнює** a. $\arcsin a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin \varphi = a \end{cases}$

Приклад

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Непарність функції $y=\arcsin x$



$$\arcsin(-a)=-\arcsin a$$

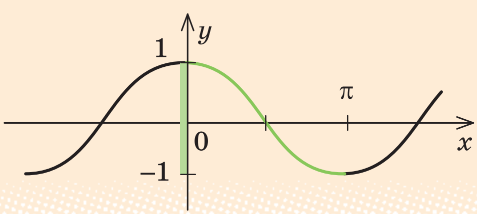
Приклад

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

2. Поняття $\arccos a$ $(|a|\leqslant 1)$

Графік функції $y=\cos x$

На проміжку $[0;\pi]$ $\cos x$ спадає.



Означення $\arccos a$

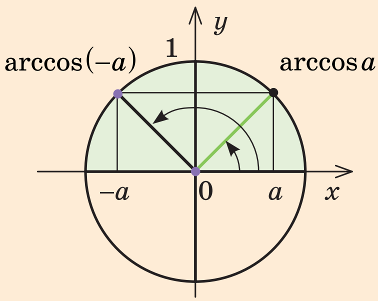
$\arccos a$ **— це таке число з проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює a.**

$$\arccos a=\varphi, \text{ якщо } \begin{cases}\varphi\in[0;\pi],\\ \cos\varphi=a\end{cases}$$

Приклад

$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{4}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Формула для $\arccos(-a)$



$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

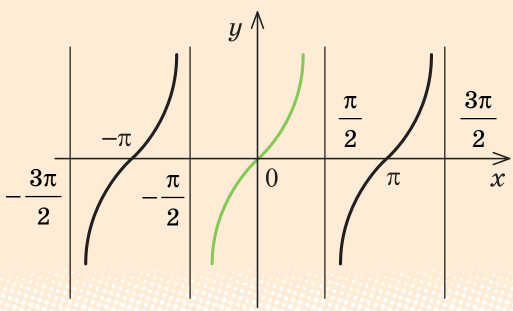
Приклад

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

3. Поняття $\mathrm{arctg}\, a$

Графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$

На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\mathrm{tg}\, x$ зростає.



Означення $\mathrm{arctg}\, a$

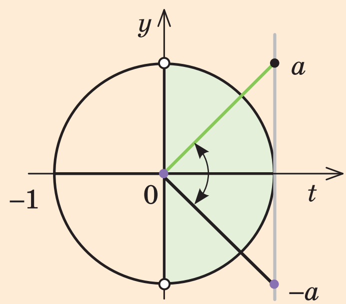
$\mathrm{arctg}\, a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

$\mathrm{arctg}\, a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ \mathrm{tg}\,\varphi = a \end{cases}$

Приклад

$\mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Непарність функції $y = \operatorname{arctg} x$



$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$

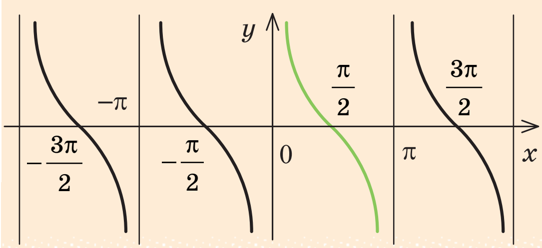
Приклад

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

4. Поняття $\operatorname{arcctg} a$

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$

На проміжку $(0; \pi)$ $\operatorname{ctg} x$ спадає.



Означення $\operatorname{arcctg} a$

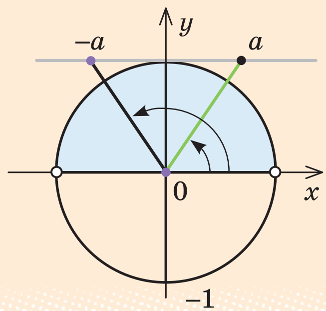
$\operatorname{arcctg} a$ **— це таке число з проміжку** $(0; \pi)$**, котангенс якого дорівнює** a.

$\operatorname{arcctg} a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctg} \varphi = a \end{cases}$

Приклад

$\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Формула для $\operatorname{arcctg}(-a)$



$$\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$$

Приклад

$$\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=$$
$$=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

Пояснення й обґрунтування найпростіших властивостей обернених тригонометричних функцій наведено в інтернет-підтримці підручника.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад. Знайдіть:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання

1) ▶ Нехай $\arcsin\frac{1}{3}=\varphi$. Тоді за означенням арксинуса одержуємо, що

$$\sin\varphi=\frac{1}{3}.$$

Отже, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$. ■

2) ▶ Нехай $\arcsin\frac{3}{5}=\varphi$. За означенням арксинуса одержуємо, що

$\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi=\frac{3}{5}$.

Коментар

1) Оскільки запис

$$\varphi=\arcsin a \quad (|a|\leqslant 1)$$

означає, що $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi=a$,

то завжди виконується рівність

$$\sin(\arcsin a)=a,\ |a|\leqslant 1.$$

2) Якщо позначити вираз у дужках через φ, то за вимогою задачі потрібно знайти $\cos\varphi$. Використавши означення арксинуса, одержуємо стандартну задачу: знаючи синус кута, знайти його косинус, якщо кут розташований у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.